INTEGRACIÓN ESTOCÁSTICA

Introducción

El Cálculo Estocástico es en realidad únicamente Cálculo Integral Estocástico, por lo menos en lo que se refiere a la teoría que quedó prácticamente concluída hacia finales de los años 70's del siglo pasado y que en lo que sigue denominaré Cálculo Estocático Clásico. Después esa teoría se fue ampliando y se desarrolló en varias direcciones. Ahora bien, al igual que ocurrió con el Cálculo Diferencial e Integral que conocemos, la teoría de Integración Estocástica se desarrolló para poderla aplicar en la solución de cierto tipo de problemas de interés. De manera específica, el objetivo es poder resolver las llamadas ecuaciones diferenciales estocásticas, las cuales también son en realidad ecuaciones integrales estocásticas. En el Cálculo Estocástico Clásico no hay derivadas; es decir, no hay un Cálculo Diferencial Estocástico ya que, en general, se trabaja con funciones que no son diferenciables. A su vez, el resolver ecuaciones diferenciales estocásticas tiene por objetivo el poder construir procesos estocásticos que modelen fenómenos de interés en diversas áreas.

Una ecuación diferencial estocástica (EDE) es una relación de la forma:

$$dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t$$

donde $(X_t)_{t\geq 0}$ es un proceso estocástico, μ y σ son dos funciones reales definidas en $\mathbb{R}^2$ y $(W_t)_{t\geq 0}$ es un proceso de Wiener. Ecuaciones de este tipo se presentan en una diversidad de situaciones. La idea general es que si un sistema dinámico es modelado por una ecuación diferencial ordinaria $\frac{dX}{dt} = \mu(t, X)$ y dicho sistema es perturbado por la presencia de un ruido.[a]leatorio, entonces la modelación estaría dada por una ecuación de la forma $\frac{dX}{dt} = \mu(t, X) + \sigma(t, X)\,\xi(t)$, en donde ξ representa la perturbación aleatoria. El ruido ξ se modela usualmente como la "derivada"de un proceso de Wiener, de manera que la última ecuación se escribiría en la forma:

$$dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t$$

μ es llamada el **arrastre** (drift) y σ la **volatilidad**.

El proceso de Wiener

El proceso de Wiener es un modelo matemático desarrollado por Norbert Wiener, entre los años entre 1921 y 1923, del movimiento browniano, el cual consiste en el movimiento que presenta una pequeña partícula suspendida en un líquido, el cual es debido a los choques de las moléculas del líquido con la partícula. Fue estudiado a fondo por Robert Brown en el año 1827, de ahí su nombre. La explicación de este movimiento observado por Brown la dio Einstein basándose en la teoría molecular.

Lo que hizo Wiener fue definir un espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$ y, para cada $t \geq 0$, una variable aleatoria $W_t : \Omega \to \mathbb{R}$ de tal manera que la familia $(W_t)_{t \geq 0}$ tenga las propiedades que se considera tiene un movimiento browniano, las cuales son las siguientes:

1. Las posibles trayectorias $t \to W_t$ son funciones continuas.
2. $E\left[W_t\right] = 0$ para toda t.
3. Dados $0 \leq s < t$, $W_t - W_s$ es independiente de la trayectoria seguida hasta el tiempo s.
4. Dados $0 \leq s < t$, la distribución de $W_t - W_s$ es una función de $t - s$.

Se puede mostrar que bajo estas condiciones, $W_t - W_s$ tiene distribución normal con media cero y varianza $t - s$.

En el modelo desarrollado por Wiener se puede mostrar que, con probabilidad 1, las funciones $t \to W_t$ no son diferenciables; así que $\sigma(X_t, t)dW_t$ no puede entenderse en el sentido usual.

La Integral de Ito

En sentido escrito una EDE es en realidad una ecuación integral:

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(X_s, s)ds + \int_0^t \sigma(X_s, s)dW_s$$

Sin embargo, al no ser diferenciables las funciones $t \to W_t$, tampoco son de variación acotada; de manera que la integral $\int_0^t \sigma(X_s, s)dW_s$ no puede entenderse en el sentido usual, como una integral de Stieltjes.

De ahí la importancia del resultado de K. Ito (Stochastic Integral, 1944) al darle un sentido preciso a una integral de la forma $\int_0^t Z_s dW_s$ para una familia amplia de procesos $(Z_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$.

Son dos las propiedades básicas del proceso de Wiener que permitieron a Ito definir la integral estocástica $\int_0^t Z_s dW_s$.

1. El proceso de Wiener $(W_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ es una martingala.
2. El proceso $(W_t^2 - t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ es una martingala.

La integral de Ito se define primero para una familia de procesos simples y después se extiende a otro tipo de procesos tomando límites:

Se comienza con procesos de la forma $H_t(\omega) = I_{(a,b]\times F}(t, \omega)$, para los cuales se define:

$\int H_s dW_s = (W_b - W_a)I_F$

$\int_0^t H_s dW_s = \int H_s I_{[0,t]}(s) dW_s$ para cualquier $t \in \mathbb{R}^+$

De manera que se tiene:

$$\int_0^t H_s dW_s = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq a \\ (W_t - W_a)I_F & \text{si } a < t \leq b \\ (W_b - W_a)I_F & \text{si } t > b \end{cases}$$

Obsérvese que **lo anterior se hace para cada $\omega \in \Omega$; la integración es sobre la variable** s.

Definiendo, para cada $t \in \mathbb{R}^+$, $N_t = \int_0^t H_s dW_s$, se tienen las siguientes propiedades:

1. $(N_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ es una martingala continua nula en cero.

2. $\left(N_t^2 - \int_0^t H_s^2 ds\right)_{t\in\mathbb{R}^+}$ es una martingala continua nula en cero.

El siguiente paso consiste en definir la integral para un proceso del tipo $Z_t(\omega) = \sum_{k=1}^{m} c_k H_t^{(k)}(\omega)$, donde $c_1, c_2, \ldots, c_m$ son constantes y, para cada $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $H_t^{(k)}(\omega) = I_{(a_k, b_k] \times F_k}(t, \omega)$. Para un proceso de este tipo se define:

$$\int_0^t Z_s dW_s = \sum_{k=1}^{m} c_k \int_0^t H_s^{(k)} dW_s$$

Nuevamente, definiendo, para cada $t \in \mathbb{R}^+$, $N_t = \int_0^t Z_s dW_s$, se tienen las siguientes propiedades:

1. $(N_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ es una martingala continua nula en cero.

2. $\left(N_t^2 - \int_0^t Z_v^2 dv \right)_{t \in \mathbb{R}^+}$ es una martingala continua nula en cero.

Ahora viene un paso fundamental:

Como el proceso $\left(N_t^2 - \int_0^t Z_s^2 ds \right)_{t \in \mathbb{R}^+}$ es una martingala nula en cero, se tiene, para cada $t \in \mathbb{R}^+$:

$$E\left[N_t^2\right] = E\left[\int_0^t Z_s^2 ds\right]$$

Esto define una isometría entre dos espacios L^2, la cual permite extender la integral estocástica a todos los procesos que se puedan generar mediante procesos del tipo de los procesos $(Z_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ definidos arriba. La integral estocástica queda así definida para una familia bastante amplia de procesos, la cual incluye a todos los procesos continuos $(Z_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ tales que $E\left[\int_0^t Z_s^2 ds\right] < \infty$ para toda $t \in \mathbb{R}^+$.

Obsérvese que, al definir la integral estocástica de esta manera, ya no se hace como en el primer paso, para cada $\omega \in \Omega$, sino que l**a integral estocástica $\int_0^t Z_s dW_s$ se define como el límite en $L^2(\Omega, \Im)$ de una sucesión de variables aleatorias**.

Fórmula de Ito

Si $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es de de clase C^2, entonces:

$$F(W_t) = F(W_0) + \int_0^t F'(W_s)dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t F''(W_s)ds$$

Este resultado es conocido como **fórmula de Ito**.

Obsérvese que se trata del equivalente al **teorema fundamental del Cálculo** de la integral de Riemann.

Como ejemplos, se tiene:

a) $\int_0^t W_s^n dW_s = \frac{1}{n+1}W_t^{n+1} - \frac{n}{2}\int_0^t W_s^{n-1}ds$

b) $\int_0^t e^{W_s}dW_s = e^{W_t} - 1 - \frac{1}{2}\int_0^t e^{W_s}ds$

c) $\int_0^t \cos W_s dW_s = senW_t + \frac{1}{2}\int_0^t senW_s ds$

En estas integrales se puede observar que se obtiene lo mismo que en el Cálculo Integral clásico, pero hay un término adicional, el cual proviene de la variación cuadrática del proceso de Wiener, que no es cero.

Variación cuadrática

Sea $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua de variación acotada y $P = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ una partición del intervalo $[a,b]$, entonces

$\sum_{k=1}^{n} [g(t_k) - g(t_{k-1})]^2 \leq \max\limits_{k} |g(t_k) - g(t_{k-1})| \sum_{k=1}^{n} |g(t_k) - g(t_{k-1})|$

$\leq Var(g) \max\limits_{k} |g(t_k) - g(t_{k-1})|$

donde $Var(g) = \sup\limits_{P} \sum_{k=1}^{n} |g(t_k) - g(t_{k-1})| < \infty$

Por lo tanto,

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} [g(t_k) - g(t_{k-1})]^2 \leq Var(g) \lim_{\|P\| \to 0} \max_{k} |g(t_k) - g(t_{k-1})| = 0$$

ya que la función g es uniformemente continua en $[a,b]$.

Por otra parte se tiene el siguiente resultado:

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \left(W_{t_k} - W_{t_{k-1}}\right)^2 = t \text{ en } L^2$$

donde $P = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t\}$ es una partición del intervalo $[0,t]$.

Al límite en L^2, $\lim\limits_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \left(W_{t_k} - W_{t_{k-1}}\right)^2$, se le conoce como la variación cuadrática del proceso $(W_s)_{s \in [0,\infty)}$ en el intervalo $[0,t]$.

Como corolario de este resultado se tiene lo siguiente:

1. $\lim\limits_{\|P\| \to 0} (P) \sum_{k=1}^{n} W_{t_{k-1}} \left[W_{t_k} - W_{t_{k-1}}\right] = \frac{1}{2} W_t^2 - \frac{1}{2} t$
2. $\lim\limits_{\|P\| \to 0} (P) \sum_{k=1}^{n} W_{t_k} \left[W_{t_k} - W_{t_{k-1}}\right] = \frac{1}{2} W_t^2 + \frac{1}{2} t$

donde $P = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t\}$ es una partición del intervalo $[0,t]$.

Como puede verse, los dos límites de la proposición anterior son distintos por el hecho de que la variación cuadrática de $(W_t)_{t \in [0,\infty)}$ es distinta de cero.

Informalmente podemos decir que en el Cálculo Estocástico se toma la primera opción para evaluar una integral estocástica. Tomar el extremo izquierdo de cada sub intervalo de la partición P significa no "adelantarse" al proceso; se toma su valor al inicio del intervalo.

Comentario:

Tenemos lo siguiente:

1. El proceso $(W_t^2 - t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ es una martingala.
2. Si $P = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t\}$ es una partición del intervalo $[0,t]$, entonces:

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \left(W_{t_k} - W_{t_{k-1}}\right)^2 = t \text{ en } L^2$$

Son 2 resultados en los cuales aparece t. ¿Se trata de una casualidad?

No, en realidad se trata de la misma t; además esa t está representando la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$.

Representemos por $\langle W,W\rangle_t$ a la variación cuadrática de $(W_s)_{s\in[0,\infty)}$ en el intervalo $[0,t]$. Entonces podemos decir que:

El proceso $(W_t^2 - \langle W,W\rangle_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ es una martingala.

Así que, las propiedades del proceso de Wiener que permitieron a Ito definir la integral estocástica, las podemos re escribir de la siguiente manera:

1. El proceso $(W_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ es una martingala.
2. El proceso $(W_t^2 - \langle W,W\rangle_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ es una martingala.

Aquí cabe mencionar que, los resultados de la teoría de los procesos estocásticos obtenidos durante la primera mitad del siglo XX fueron recogidos, sistematizados y complementados con nuevos resultados, en dos libros que marcaron la pauta para continuar desarrollando esta teoría por lo menos durante los 30 años que les siguieron: El libro de Paul Lévy *Processus stochastiques et mouvement brownien*, publicado en 1948 y el libro de Joseph Leo Doob *Stochastic processes*, publicado en 1953.

En particular, en su libro, Doob fue quien hizo ver que las propiedades del proceso de Wiener que permitieron a Ito definir la integral estocástica son las que mencionamos antes. Entonces conjeturó que si, dada una martingala $(W_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$, existe un proceso no decreciente $(A_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ tal que el proceso $(W_t^2 - A_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ sea una martingala, entonces, siguiendo el procedimiento de Ito, se podría definir la integral estocástica de un proceso $(Z_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ con respecto a la martingala, vía la doble integral $\int_\Omega \left(\int_0^t Z_s^2 dA_s\right) dP = E\left[\int_0^t Z_s^2 dA_s\right]$, la cual está bien definida como integral de Lebesgue.

La existencia de ese proceso no decreciente $(A_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$, para martingalas con determinadas propiedades, fue demostrada por Paul A. Meyer en su tesis doctoral, del año 1962.

A partir de ese momento se comenzó a desarrollar un Cálculo Estocástico más general que el de Ito.

Solución de ecuaciones diferenciales estocásticas

La fórmula de Ito permite resolver **ecuaciones diferenciales estocásticas** del tipo:

$$dX_t = a(X_t, t)dt + b(X_t, t)dW_t$$

Ejemplos

1. $dX_t = X_t dW_t \qquad X_0 = 1$

En forma integral: $X_t = 1 + \int_0^t X_s dW_s$

Solución: $X_t = \exp\left\{W_t - \frac{1}{2}t\right\}$

2. $dX_t = tX_t dW_t \qquad X_0 = 1$

En forma integral: $X_t = 1 + \int_0^t sX_s dW_s$

Solución: $X_t = \exp\left\{\int_0^t s dW_s - \frac{1}{6}t^3\right\}$

3. $dX_t = X_t dt + tX_t dW_t \qquad X_0 = 1$

En forma integral: $X_t = 1 + \int_0^t X_s ds + \int_0^t sX_s dW_s$

Solución: $X_t = \exp\left\{t - \frac{1}{6}t^3 + tW_t - \int_0^t W_s ds\right\}$

4. $dX_t = tX_t dt + X_t dW_t \qquad X_0 = 1$

En forma integral: $X_t = 1 + \int_0^t sX_s ds + \int_0^t X_s dW_s$

Solución: $X_t = \exp\left\{W_t + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t\right\}$

5. $X_t = e^{\beta W_t - \frac{1}{2}\beta^2 t}\left(X_0 + \int_0^t \alpha e^{-\left(\beta W_s - \frac{1}{2}\beta^2 s\right)} ds\right)$

es solución de la ecuación:

$dX_t = \alpha dt + \beta X_t dW_t$

donde α y β son constantes.

Aplicación a Finanzas

Desde principios de siglo se propuso al proceso de Wiener como un modelo para el precio de las acciones (Bachelier, Théorie de la speculation, 1900).

En los 60's se propuso un nuevo modelo (Samuelson, Rational theory of warrant pricing, 1965). Según ese nuevo modelo, el precio S_t, al tiempo $t \geq 0$, de una acción está dado por

$$S_t = S_0 e^{at+\sigma W_t}$$

donde a y σ son constantes y $(W_t)_{t\geq 0}$ es un proceso de Wiener.

Usualmente este modelo se escribe en la siguiente forma diferencial:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

Podemos ver que esta segunda formulación es más natural pues se puede escribir también en la siguiente forma:

$$\tfrac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

Sin el término σdW_t, la última expresión representa la evolución determinista de un capital que genera continuamente un interés compuesto a una tasa igual a μ. El papel del segundo término, σdW_t, consiste en agregar a la evolución del precio un elemento aleatorio que se distribuye normalmente.

El interés por este modelo se vió incrementado con la publicación de un artículo de F. Black y M. Scholes (The pricing of options and corporates liabilities, 1973).

Una opción de compra (Call) es un contrato el cual da derecho a su poseedor de comprar, si así lo desea, un cierto valor financiero, digamos una acción, a un precio determinado K en un tiempo determinado T.

Obviamente, el poseedor de la opción ejercerá su derecho únicamente cuando el valor de la acción al tiempo T sea mayor que K. En esta situación, una vez comprada la acción, puede venderla al precio de mercado y obtener así una ganancia inmediata. Esta posibilidad de obtener una ganancia al momento de ejercer su derecho de compra hace que el poseedor de la opción tenga que pagar un cierto valor por ella.

¿Cómo se puede determinar el valor que se debe de pagar por una opción?

Black y Scholes consideraron un segundo valor financiero β_t, llamado un bono, el cual genera una ganancia sin riesgo y está dado por la ecuación:

$$d\beta_t = r\beta_t dt$$

Una estrategia financiera consiste de una pareja de funciones (a_t, b_t), las cuales representan las unidades de cada instrumento que se poseen en el tiempo t. Para cada t, la pareja (a_t, b_t) es llamada un portafolio.

El valor del portafolio en el tiempo t está dado por:

$$a_t S_t + b_t \beta_t$$

La ganancia generada hasta el tiempo t mediante esta estrategia está dada por:

$$\int_0^t a_u dS_u + \int_0^t bud\beta_u$$

Se dice que la estrategia (a_t, b_t) es autofinanciable si se cumple la siguiente igualdad:

$$a_t S_t + b_t \beta_t = a_0 S_0 + b_0 \beta_0 + \int_0^t audS_u + \int_0^t bud\beta_u$$

Sea ahora Y_t el valor de la opción en el tiempo t

Y_T es conocido pues es igual a la ganancia obtenida por el poseedor:

$$Y_T = \text{máx}(S_T - K, 0)$$

Black y Scholes formularon entonces el problema de la valuación de opciones de la siguiente manera:

Supongamos que existe una estrategia autofinanciable (a_t, b_t) tal que el valor del portafolio al tiempo t sea igual al valor de la opción en el mismo tiempo, es decir:

$$a_t S_t + b_t \beta_t = Y_t \text{ para todo } t \in [0, T]$$

Entonces, el valor que se debe de pagar por una opción en el tiempo 0 debe de ser igual al valor del portafolio en ese mismo tiempo, de acuerdo con el siguiente razonamiento:

Supongamos $Y_0 > a_0 S_0 + b_0 \beta_0$

En el tiempo $t = 0$ se podría entonces vender la opción y, con parte de lo obtenido de esa venta, armar el portafolio (a_0, b_0). Como la estrategia (a_t, b_t) es autofinanciable, sin inversión adicional, al tiempo T el valor del portafolio sería $a_T S_T + b_T \beta_T = Y_T$. Por otra parte, al tiempo T el poseedor de la opción requiere una ganancia igual a Y_T, la cual puede entonces obtenerse del valor del portafolio en ese mismo tiempo. De esta manera, sin riesgo alguno, se tendría una ganancia inicial igual a $Y_0 - (a_0 S_0 + b_0 \beta_0)$, lo cual no es permitido.

Supongamos $Y_0 < a_0 S_0 + b_0 \beta_0$

En el tiempo $t = 0$ se podría entonces vender a_0 acciones y b_0 bonos para armar un portafolio (a_0, b_0) y, con parte de lo obtenido de esa venta, comprar la opción. Como la estrategia (a_t, b_t) es autofinanciable, sin necesidad de pagos de ganancias intermedias, al tiempo T el valor del portafolio sería $a_T S_T + b_T \beta_T = Y_T$. Por otra parte, al tiempo T la opción genera una ganancia igual a Y_T, la cual cubre el valor del portafolio en ese mismo tiempo. De esta manera, sin riesgo alguno, se tendría una ganancia inicial igual a $(a_0 S_0 + b_0 \beta_0) - Y_0$, lo cual no es permitido.

Consideremos entonces una acción cuyo precio está dado por la ecuación diferencial estocástica

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

y consideremos un bono determinado por la ecuación diferencial ordinaria

$$d\beta_t = r \beta_t dt$$

Consideremos además una opción con precio de ejercicio K y tiempo de expiración T

Sea Y_t el precio de la opción en el tiempo t. Busquemos entonces una estrategia autofinanciable (a_t, b_t) tal que $Y_t = a_t S_t + b_t \beta_t$ para todo tiempo $t \in [0, T]$

Como la estrategia que buscamos es autofinanciable se debe de tener:

$$a_t S_t + b_t \beta_t = a_0 S_0 + b_0 \beta_0 + \int_0^t a_u dS_u + \int_0^t b_u d\beta_u$$

Por lo tanto,

$Y_t = a_0S_0 + b_0\beta_0 + \int_0^t a_u dS_u + \int_0^t b_u d\beta_u$

$= a_0S_0 + b_0\beta_0 + \int_0^t a_u\mu S_u du + \int_0^t a_u\sigma S_u dW_u + \int_0^t b_u r\beta_u du$

$= a_0S_0 + b_0\beta_0 + \int_0^t [a_u\mu S_u + b_u r\beta_u]\, du + \int_0^t a_u\sigma S_u dW_u$

Por otra parte, Y_t es una función de S_t y t. Sea $Y_t = C(S_t, t)$

Por la fórmula de Ito se tiene:

$Y_t = Y_0 + \int_0^t C_x(S_u, u) dS_u + \int_0^t C_y(S_u, u) du + \frac{1}{2}\int_0^t C_{xx}(S_u, u) d\langle S, S\rangle_u$

$= Y_0 + \int_0^t C_x(S_u, u)\mu S_u du + \int_0^t C_x(S_u, u)\sigma S_u dW_u + \int_0^t C_y(S_u, u) du + \frac{1}{2}\int_0^t C_{xx}(S_u, u)\sigma^2 S_u^2 du$

$= Y_0 + \int_0^t \left[C_x(S_u, u)\mu S_u + C_y(S_u, u) + \frac{1}{2}C_{xx}(S_u, u)\sigma^2 S_u^2\right] du + \int_0^t C_x(S_u, u)\sigma S_u dW_u$

Igualando coeficientes se obtiene:

$Y_0 = a_0S_0 + b_0\beta_0$

$C_x(S_u, u)\mu S_u + C_y(S_u, u) + \frac{1}{2}C_{xx}(S_u, u)\sigma^2 S_u^2 = a_u\mu S_u + b_u r\beta_u$

$C_x(S_u, u)\sigma S_u = a_u\sigma S_u$

De manera que se tiene:

$a_u = C_x(S_u, u)$

$b_u r\beta_u = C_y(S_u, u) + \frac{1}{2}C_{xx}(S_u, u)\sigma^2 S_u^2$

Además,

$C(S_t, t) = Y_t = a_tS_t + b_t\beta_t = C_x(S_t, t)S_t + b_t\beta_t$

Así que:

$$b_t = \frac{1}{\beta_t}\left[C(S_t, t) - C_x(S_t, t)S_t\right]$$

Por lo tanto:

$$C_y(S_t, t) + \frac{1}{2}C_{xx}(S_t, t)\sigma^2 S_t^2 = b_u r\beta_u = r\left[C(S_t, t) - C_x(S_t, t)S_t\right]$$

Es decir:

$$-rC(S_t, t) + C_y(S_t, t) + rC_x(S_t, t)S_t + \frac{1}{2}C_{xx}(S_t, t)\sigma^2 S_t^2 = 0$$

La función $C(x,t)$ que estamos buscando es entonces solución de la ecuación en derivadas parciales

$$-rC(x,t) + C_t(x,t) + rxC_x(x,t) + \tfrac{1}{2}\sigma^2 x^2 C_{xx}(x,t) = 0$$

con condición de frontera $C(x,T) = \text{máx}(x-K,0)$.

La solución de esta ecuación en derivadas parciales está dada por:

$$C(x,t) = x\Phi(z) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(z - \sigma\sqrt{T-t})$$

donde:

$$z = \tfrac{\ln\frac{x}{K} + \left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$\Phi(y) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{1}{2}u^2}du$$

El precio que se debe de pagar por la opción está dado entonces por:

$$Y_0 = C(S_0,0) = S_0\Phi(\tfrac{\ln\frac{S_0}{K} + T\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma\sqrt{T}}) - Ke^{-rT}\Phi(\tfrac{\ln\frac{S_0}{K} + T\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma\sqrt{T}})$$

La solución de la ecuación en derivadas parciales puede obtenerse resolviendo la ecuación:

$$dZ_s = rZ_s ds + \sigma Z_s dW_s$$

con condición inicial $Z_t = x$.

Utilizando la fórmula de Ito, se obtiene:

$$Z_s = xe^{\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(s-t)+\sigma W_{(s-t)}}$$

Por lo tanto:

$$Y_0 = e^{-rT}E\left[\text{máx}\left(Z_T - K, 0\right)\right]$$